Unidad II: Sistemas Lineales discretos y continuos (continuación)

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a las ecuaciones lineales.

Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis de los sistemas lineales discretos y continuos.

2.1 Diferencia entre sistemas continuos y sistemas discretos[1]

Sistemas continuos

Los sistemas continuos operan con señales analógicas y su principal característica es presentar continuidad tanto en magnitud como en tiempo. Sistemas Discretos Principal característica es operar con señales discontinuas que presentan su discontinuidad tanto en magnitud como en tiempo Son los primeros sistemas de adquisición de datos. También se les conoce como sistemas convencionales. Primer característica: Registran y manipulan la información mediante señales analógicas (Voltaje, corriente, presión, temperatura, posición o alguna variable física).

Continuidad en magnitud lo definimos bajo la característica de que ante un rango definido de la variable o señal se tienen un número infinito de valores intermedios. Continuidad en tiempo Se puede decir que una señal o variable que muestra continuidad en el tiempo es aquella que siempre está presente. Tienen la característica de operar con información no con señales que presentan discontinuidad tanto en magnitud como en tiempo. Las computadoras operan y manipulan información en forma de códigos digitales.

En una señal continua tenemos que en cualquier intervalo definido se tiene un número infinito de valores intermedios. En una señal discreta se tiene un número finito de combinaciones, es por eso que en el momento de conversión se tendrá que aproximar la magnitud de la señal continua a la combinación digital que mejor represente su magnitud. Discontinuidad en magnitud La operación con códigos digitales hace que un valor solo pueda ser representado por una combinación de un número finito de combinaciones, esto genera una discontinuidad en magnitud porque entre un valor y el siguiente no existen valores intermedios. Discontinuidad en tiempo La discontinuidad en tiempo se produce al realizar una secuencia de instrucciones. Que precauciones debemos tener en el diseño de sistemas discretos. El tamaño de la palabra lo que va a fijar el error de cuantización, producido por el redondeo o truncamiento producido en la conversión de la variable continua a un código digital.

El tiempo entre muestreos evitará que se "escapen eventos" o se produzca distorsión en la información. Ventajas y desventajas del Sistema Discreto del Continuo Facilidad para el procesamiento de la señal. Se ven menos afectadas a causa del ruido ambiental.

Puede ser amplificada y reconstruida al mismo tiempo. Necesita una conversión analógica-digital previa. La señal digital requiere mayor ancho de banda que la señal analógica para ser transmitida. En cuanto video y sonido, un sistema discreto es más costoso y con menos calidad que un sistema continuo.

Señal es cualquier cantidad física que varía con el tiempo, espacio o cualquier otra variable Tipos de Señales De tiempo continuo (continuas) Son señales continuas en el tiempo definidas por una sucesión continua de valores

---

[1] Información obtenida del sitio de Internet Wikipedia Internacional.

Surgen de un fenómeno físico Se obtienen mediante un transductor

Ejemplos: voz, temperatura, oscilaciones, etc. Si su amplitud es continua: analógicas.

De tiempo discreto (discretas) Se define sólo en instantes de tiempo discretos. Se derivan a menudo de señales continuas, muestreadas a una tasa uniforme Se representa por una secuencia de números.

- Par
- Impar
- Periódica
- Aperiódico
- Determinista
- Aleatoria
- De energía de potencia.

Las señales digitales pueden entregar 2 tipos de información: a) Estado de la señal: 0 o 1, (on – off.) Cantidad de pulsos: es posible que con la cantidad de pulsos de un sistema se obtenga información como el ángulo de giro de un motor. De las señales analógicas se puede obtener este tipo de información: a) Nivel o Valor Analógico de la señal: permite apreciar el valor que a tomado la señal, la cual será de lenta variación, por ejemplo un sensor de caudal. b) Forma o Contorno de la Señal: importantísimo cuando se adquieren señales analógicas a alta velocidad y se grafica con respecto al tempo. c) Dominio de la frecuencia: es necesario muestrear la misma a alta velocidad y realizar la transformada de Fourier para hacer el análisis con frecuencias o armónicos.

Sistemas discretos

Los sistemas de control de tiempo discreto (STD) son sistemas dinámicos para los cuales una ó más de sus variables solamente son conocidas en ciertos instantes. Por lo tanto, son aquellos que manejan señales discretas, a diferencia de los sistemas de tiempo continuo (STC) en los cuales sus variables son conocidas en todo momento. El hecho de que algunas funciones del tiempo propias del STD varíen en forma discreta, puede provenir de una característica inherente al sistema, como en el caso de aquellos que trabajan con algún tipo de barrido, por ejemplo: un sistema de radar.

La otra posibilidad es que la variación discreta provenga de un proceso de muestreo de alguna señal, y estos últimos son los que interesan en este estudio. Este proceso de muestreo, que convierte una señal analógica o de tiempo continuo en una señal discreta o muestreada, podría hacerse a un ritmo constante, variable según alguna ley de variación o aleatorio. En este capítulo se estudiarán aquellos cuyo muestreo obedece a un ritmo constante o sea, aquellos en los que el intervalo de muestreo es constante.

Las matemáticas discretas son un área de las matemáticas encargadas del estudio de los conjuntos discretos: finitos o infinitos numerables. En oposición a las matemáticas continuas, que se encargan del estudio de conceptos como la continuidad y el cambio continuo, la matemáticas discretas estudian estructuras cuyos elementos pueden contarse uno por uno separadamente. Es decir, los procesos en matemáticas discretas son contables, como por ejemplo, los números enteros, grafos y sentencias de lógica.[ ]Mientras que el cálculo infinitesimal está fundado en los números reales que no son numerables, la matemática discreta es la base de todo lo relacionado con los números naturales o conjuntos numerables.

Son fundamentales para la ciencia de la computación, porque sólo son computables las funciones de conjuntos numerables. La clave en matemáticas discretas es que no es posible manejar las ideas de proximidad o límite y suavidad en las curvas, como se puede en el cálculo. Por ejemplo, en matemáticas discretas una incógnita puede ser 2 ó 3, pero nunca se aproximará a 3 por la izquierda con 2.9, 2.99, 2.999, etc. Las gráficas en matemáticas discretas vienen dadas por un conjunto finito de puntos que se pueden contar por separado; es decir, sus variables son discretas o digitales, mientras que las gráficas en cálculo son trazos continuos de rectas o curvas; es decir, sus variables son continuas o analógicas. etc.

Las diferencias entre uno y otro.

Evento discreto: es una acción que ocurre solo una vez en el tiempo por lo cual se vuelve única en el sistema y puede ocasionar que el estado del sistema cambie.

Evento continuo: es una acción constante en el sistema ligada al reloj simulador que presenta eventos continuos por lo cual las variables cambian ininterrumpidamente con respecto al tiempo.

Evento Discreto	**Evento Continuo**
Acción instantánea	Acción que nunca termina
Ocurre en un punto único en el tiempo	Continua ininterrumpidamente con respecto al tiempo
La ocurrencia puede ocasionar que el estado del sistema cambie	Permite que las variables cambien continuamente sobre el tiempo
Se mantiene un tiempo denominado reloj de simulación	Se mantiene una tasa definida de cambio ligada al reloj de simulación

2.2 Ecuaciones diferenciales[2]

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas (o diferenciales) de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable, la ecuación se llama una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable la ecuación se llama una ecuación diferencial parcial.

Un ejemplo de ecuación diferencial ordinaria es:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

La variable independiente (v. i) es x

La variable dependiente (v. d) es y

Un ejemplo de ecuación diferencial parcial es:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + 2\frac{d^2V}{dy^2} = V$$

La variable independiente (v. i) es "x" y "y"

[2] Información obtenida del sitio de Internet monografías.com

La variable dependiente (v. d) es V

__Orden de una ecuación diferencial__

El orden de una ecuación diferencial está dado por el orden mayor de su derivada.

Ejemplo;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \qquad orden\ 2\ por\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x \qquad orden\ 3\ por\ y'''$$

$$(x+y)dx = (y-x)dy \qquad orden\ 1\ por\ "dx"\ y\ "dy"$$

$$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2 \qquad orden\ 2\ por\ y''$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x} \qquad orden\ 4\ por\ "\frac{d^4y}{dx^4}"$$

__Grado de una ecuación diferencial__

El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente del mayor orden de su derivada.

Ejemplos:

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

1) $e^x\frac{d^2y}{dx^2} + sen\ x\frac{dy}{dx} = x$ 2do orden 1er grado

2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$ 3er orden 2do grado

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = tan\ x$ 3er orden 1er grado

4) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 1er orden 1er grado

__Solución de una ecuación diferencial__

Una función que cuando se remplaza en la ecuación diferencial da una igualdad, se llama una solución de la ecuación diferencial, por lo tanto, resolver una ecuación diferencial es encontrar una función desconocida que al ser sustituida en la ecuación diferencial se obtiene una igualdad.

Función primitiva de una ecuación diferencial

Es una expresión equivalente a la ecuación diferencial que carece de derivadas.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

El objetivo es encontrar la función y
dy = 2x dx, pasando dx para poder integrar

$$\int dy = \int 2xdx \qquad integrando$$

$$y = 2\frac{x^2}{2} + c \qquad sumamos\ la\ constante\ c, cuando\ la\ integramos\ a\ \ la\ \ v.i.$$

$$y = x^2 + c \qquad solución\ general\ (por\ c)$$

La expresión es una "función primitiva" de la ecuación diferencial.

Verificación:

$$y = x^2 + c \qquad Solución$$

La solución es aquella función que al ser reemplazada en la variable dependiente "y" satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$$

$$x = 2x$$

Observación: Al derivar la función primitiva se reproduce exactamente la ecuación diferencial.

Problema de valor inicial

Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencia sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

Un problema de valor de frontera es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencia sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera.

Ejemplo:

Una curva tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier punto (x,y) de ella es igual a 2x. Hallar la ecuación de la curva si ésta pasa por el punto (2,5)

Solución:

Puesto que la pendiente de una curva en cualquier punto (x,y) de ella representa $\frac{dy}{dx}$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$dy = 2xdx$$

$$\int dy = \int 2xdx$$

$$y + C_1 = 2\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y = x^2 + C_2 - C_1$$

La operación $C_2 - C_1$ es otra constante de integración, por lo tanto queda:

$$y = x^2 + C$$

Donde C es una constante arbitraria

Empleando la condición inicial:

$$5 = (2)^2 + C \Rightarrow C = 5 - 4 \Rightarrow C = 1$$

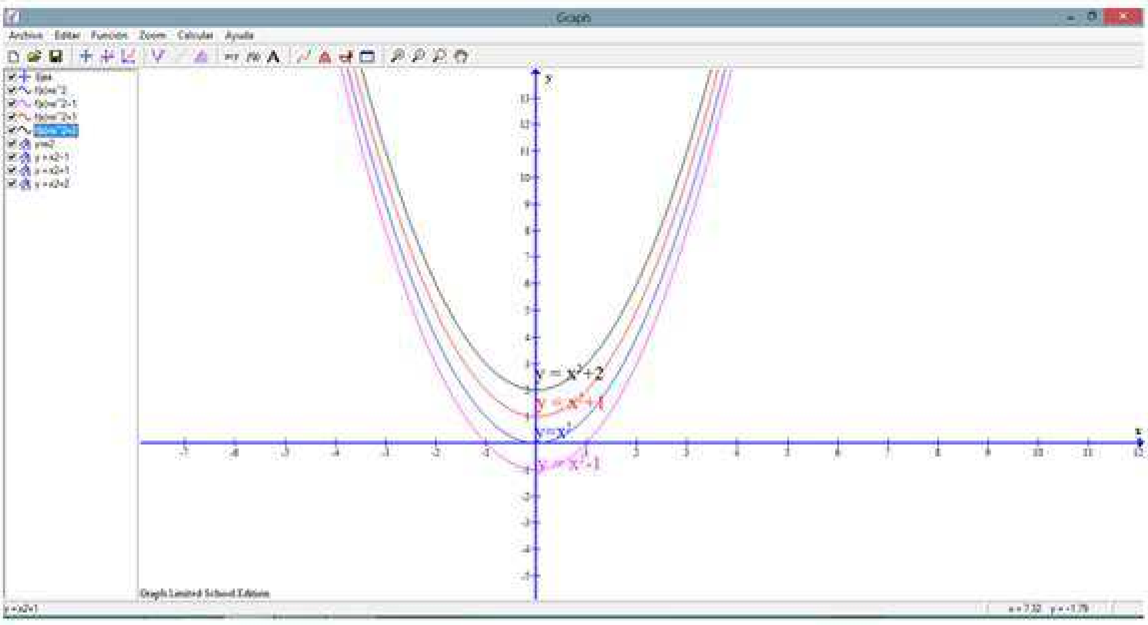
Así la curva requerida está dada por

$$y = x^2 + 1$$

Descripción de una familia de curvas

Gráficamente $y = x^2 + C$ representa una *familia de curvas*, cada miembro de ella está asociado con un valor particular de C.

En la siguiente figura se muestras algunos de estos miembros para C=0,-1, 1, 2.



Puesto que C puede variar, frecuentemente se llama un *parámetro* para distinguirlo de las variables principales *x* y *y*. La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ que es satisfecha por todos los miembros de la familia frecuentemente se llama la *ecuación diferencial de la familia*.

Gráfica 2.2.1.- Familia de curvas.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuaciones con variables separables

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

Resolución:

Separando para poder integrar

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{f}}}{(y+3)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{g}}}{\frac{1}{(x-4)}}$$

Transponiendo términos

$$\frac{1}{(y+3)} \cdot dy = dx \cdot \frac{1}{(x-4)}$$

Integrando ambos miembros

$$\int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{dx}{x-4}$$

$$\ln(y+3) = \ln(x-4) + c$$

Despejando "y" aplicando la propiedad: $a^{\log_a n} = n$

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)+C}$$

Aplicando la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)} e^{C}$$

$$y + 3 = C\,(x-4)$$

$y = C\,(x-4) - 3$ Solución general explicita (cuando se puede despejar y)

Soluciones Particulares

$\boldsymbol{Si\ c = 1}$

$y = c\,(x-4) - 3$

$y = 1\,(x-4) - 3$

$y = x - 7$

$\boldsymbol{si\ c = -2}$

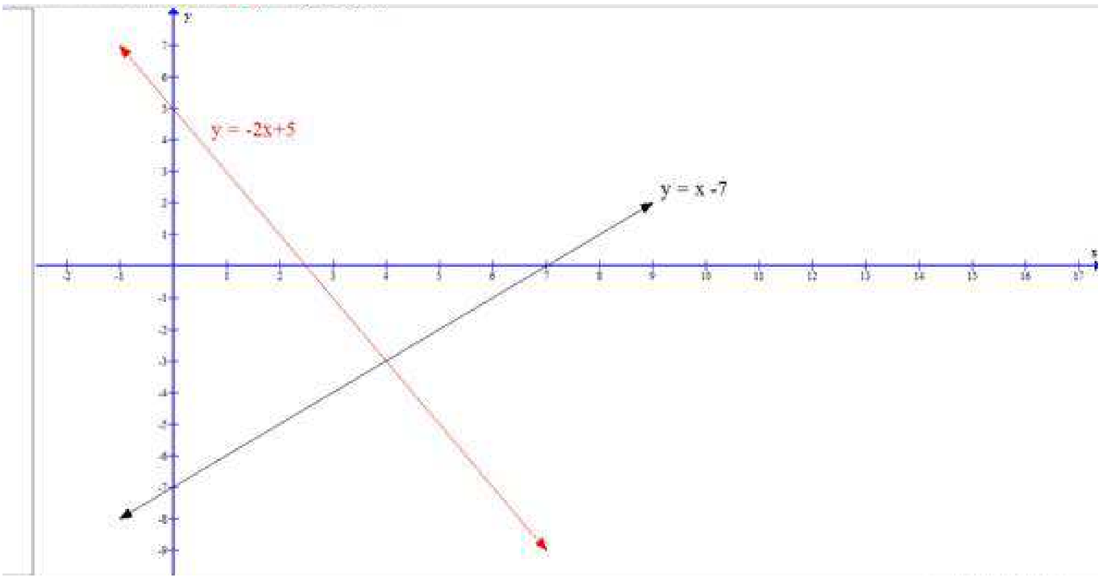
$y = c\,(x-4) - 3$

$y = -2\,(x-4) - 3$

$y = -2x + 8 - 3$

$y = -2x + 5$

Graficando en Graph



Gráfica 2.2.2.- Cruce de rectas.

Comprobación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{x}-\mathbf{7})}{dx} = \frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{7}+3}{x-4}$$

$$1 = \frac{x-4}{x-4}$$

$$1 = 1$$

Ecuaciones homogéneas

Es homogénea si no contiene términos que dependen únicamente de su variable independiente, en caso contrario es No Homogénea.

Ejemplos:

$$1)\ e^m \frac{d^2m}{dt^2} + t^3 \frac{dm}{dt} + mt \frac{dm}{dt} = mt$$

Segundo orden

No lineal

Homogénea

Es homogénea porque no contiene términos que dependen solo de su variable independiente "t".

m (variable dependiente) ; t (variable independiente)

$$2)\ \frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 8xy = 2x$$

3er orden

Lineal

No homogénea

Es NO HOMOGENEA porque si contienen un término que depende solo de la variable independiente 2x

$$2)\ \frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + e^x y = 0$$

No lineal

Homogénea

Por definición no contiene términos que dependen solamente de su variable independiente

$$4)\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{8dy}{x\,dx} - y = e^x$$

Lineal

No homogénea

$e^x \rightarrow$ *Este término depende solo de x.*

Ejemplo ilustrativo

Resolver la ecuación:

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$

Resolución:

En una ecuación diferencial homogénea se realiza el cambio

$$\boldsymbol{y = ux \quad ; dy = udx + xdu}$$

$$(x^2 + (ux)^2)dx - 2x(ux)(udx + xdu) = 0$$

Realizando las operaciones

$$(x^2 + u^2x^2)dx - 2x^2u(udx + xdu) = 0$$

Eliminando paréntesis

$$x^2dx + u^2x^2dx - 2x^2u^2dx - 2x^3udu = 0$$

Dividiendo para x^2

$$dx + u^2dx - 2u^2dx - 2xudu = 0$$

Términos semejantes

$$dx - u^2dx - 2xudu = 0$$

Agrupando y factorizando los términos con dx

$$(1 - u^2)dx - 2xudu = 0$$

Separando la variable

$$(1 - u^2)dx = 2xudu$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2udu}{1 - u^2}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2udu}{1 - u^2} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{u^2 - 1} = 0$$

Integrando

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{u^2 - 1} = C$$

$$lnx + ln(u^2 - 1) = C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos

$$lnx(u^2 - 1) = C$$

Cambiando la notación logarítmica a exponencial

$$e^C = x(u^2 - 1)$$

$$Como\ e^C = contante\ se\ obtiene:$$

$$x(u^2 - 1) = C$$

Remplazando $y = ux \quad \Rightarrow u = \frac{y}{x}$

$$x\left(\frac{y}{x^2}^2 - 1\right) = C$$

Realizando las operaciones

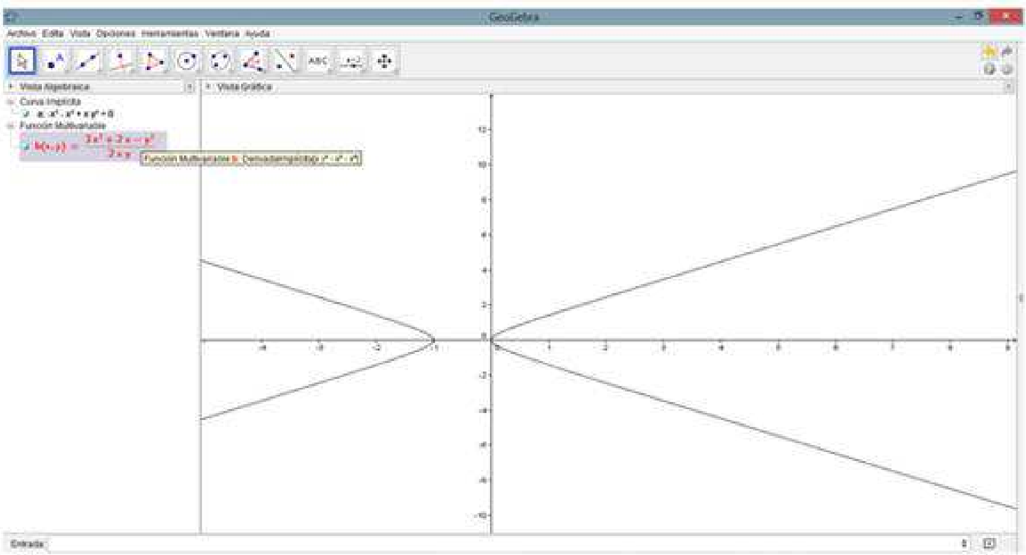
$$x\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2}\right) = C$$

$$x(y^2 - x^2) = Cx^2$$

$$xy^2 - x^3 = Cx^2$$

Graficando para un valor arbitrario C = 1

$$xy^2 - x^3 = x^2$$



Gráfica 2.2.2.- Gráfica de valor arbitrario

Ecuaciones exactas

Resolver la ecuación

$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$$

Resolución

Para que la ecuación diferencial sea exacta debe cumplir la condición

$$\frac{d(M)}{dy} = \frac{d(N)}{dx}$$

$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$$

Derivando parcialmente $2x + y$ con respecto a "y" lo

$$\frac{d}{dy}(2x + y) = 0 + 1 = 1$$

Derivando parcialmente $2y + x$ con respecto a "x"

$$\frac{d}{dx}(2y + x) = 0 + 1 = 1$$

Como cumple la condición se trata de una ecuación diferencial exacta

Como es exacta se tiene que encontrar la función $f(x, y) = C$

$\frac{d\,f}{dx} = 2x + y$; $\frac{d\,f}{dy} = 2y + x$

$$f(x,y) = \int (2x + y)dx = 2\frac{x^2}{2} + yx + g(y)$$

$$f(x,y) = x^2 + xy + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ se deriva la función $f(x, y)$ con respecto a y.

$$\frac{d\,f(x,y)}{dx} = \frac{d}{dy}(x^2 + xy + g(y))$$

$$\frac{d\,f(x,y)}{dx} = 0 + x(1) + g'(y)$$

$$\frac{d\,f(x,y)}{dx} = x + g'(y)$$

Se Iguala las dos derivadas con respecto a y.

$$x + g'(y) = 2y + x$$

$$\int g'(y) = \int 2y$$

$$g(y) = 2\frac{y^2}{2}$$

$$g(y) = y^2$$

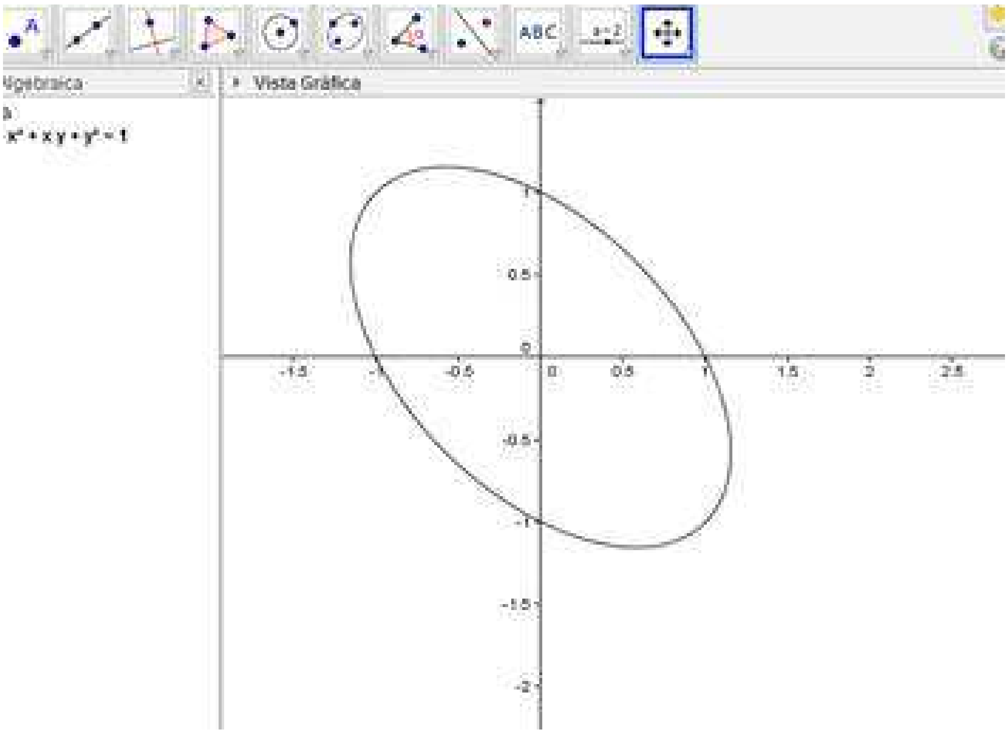
Remplazando $g(y) = y^2$ en $f(x,y) = x^2 + xy + g(y)$ se tiene:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

Por lo tanto la función $f(x,y) = C$ es

$$x^2 + xy + y^2 = C$$

Graficando la solución de la ecuación diferencial para C = 1



Gráfica 2.2.3.- Gráfica ecuación diferencial con valor = 1

Ecuaciones con factores integrantes

Dada la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Si las derivadas parciales cruzadas de las funciones no son iguales, la ecuación se denomina lineal no exacta

$$\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$$

Para convertirla en ecuación diferencial lineal exacta, en algunos casos se puede obtener un factor de integración μ tal que:

$$\mu \cdot M(x,y)dx + \mu \cdot N(x,y)dy = 0$$

Ecuación diferencial equivalente en la que deberá cumplirse que:

$$\frac{d(\mu \cdot M)}{dy} = \frac{d(\mu \cdot N)}{dx}$$

Una vez obtenida la nueva expresión se puede resolver la ecuación mediante los procedimientos para ecuaciones diferenciales exactas

Para obtener los factores de integración se pueden emplear las siguientes reglas:

Condición	Factor de integración
$\dfrac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = f(x)$	$\mu = e^{\int f(x)dx}$
$\dfrac{\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}}{M} = g(y)$	$\mu = e^{\int g(y)dy}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

Solución:

Se debe verificar si la ecuación diferencial es exacta. Las funciones definidas para las ecuaciones diferenciales exactas son:

$$M = x^2 + y^2 + x$$

$$N = xy$$

Obteniendo las derivadas parciales cruzadas se tiene:

$$\frac{dM}{dy} = 2y \quad (Derivando\ considerando\ la\ "x"\ como\ constante)$$

$$\frac{dM}{dx} = y \ \ (Derivando\ considerando\ a\ "y"\ como\ constante$$

Debido a que las 2 derivadas parciales no son iguales, la ecuación diferencial no es exacta.

Como la diferencias entre las 2 derivadas cruzadas dividida para N es una función de "x" se aplica:

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = f(x)$$

$$\frac{2y - y}{xy} = f(x)$$

De donde:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

El factor de integración μ es:

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

Remplazando la función "f(x)"

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

Aplicando la integral

$$\mu = e^{\ln(x)}$$

Aplicando las propiedades de logaritmos naturales se tiene:

$$\mu = x$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración "x" se tiene una ecuación diferencial equivalente

$$x[(x^2 + y^2 + x)dx + xydy] = 0$$

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$$

Para la nueva ecuación se debe redefinir las funciones “M” y “N”

$$M = x^3 + xy^2 + x^2$$

$$N = x^2y$$

Obteniendo las derivadas parciales cruzadas se tiene:

$$\frac{dM}{dy} = 2xy \quad (Derivando\ considerando\ la\ "x"\ como\ constante)$$

$$\frac{dM}{dx} = 2xy \quad (Derivando\ considerando\ a\ "y"\ como\ constante$$

Debido a que las 2 derivadas parciales son iguales, la nueva ecuación diferencial es exacta.

Como la nueva ecuación diferencial es exacta se procede a resolverla como en casos anteriores. Esta solución queda como tarea para el lector.

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$$

Ecuaciones lineales

Resolver las siguientes ecuaciones lineales

$$1)xdy - 3ydx = x^2dx$$

Solución

$$x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x$$

Es una ecuación lineal en "y"

Como la solución es

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right]$$

Por lo tanto

$$P(x) = -\frac{3}{x} \quad y \quad Q(x) = x$$

Remplazando

$$y = e^{-\int\left(-\frac{3}{x}dx\right)}\left[\int e^{\int -\frac{3}{x}dx}xdx + C\right]$$

Integrando

$$y = e^{3lnx}\left[\int e^{-3lnx}xdx + C\right]$$

Aplicando propiedad de la potencia de los logaritmos

$$y = e^{lnx^3}\left[\int e^{lnx^{-3}}xdx + C\right]$$

Aplicando propiedades de los logaritmos naturales

$$y = x^3\left[\int x^{-3}xdx + C\right]$$

Multiplicación de igual base

$$y = x^3\left[\int x^{-2}dx + C\right]$$

Integrando

$$y = x^3\left[-\frac{1}{x} + C\right]$$

Se obtiene la ecuación característica, para lo cual se sustituye y'' por m^2 , y' por m , e y por 1 para obtener una ecuación de la forma $m^2 + am + b = 0$

Por lo tanto la ecuación característica de $y'' - 4y = 0$ es $m^2 - 4 = 0$

Resolviendo la ecuación se tiene $m = \pm 2$

Entonces

$$y_1 = C_1 e^{m_1 x} = C_1 e^{2x}$$

$$y_2 = C_2 e^{m_2 x} = C_2 e^{-2x}$$